Clasa a VI-a- Bareme

Problema 2

Se consideră numărul natural $A = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{2013} + 3^{2014} + 3^{2015}$.

a) Arătați că numărul A este divizibil cu 52.
b) Arătați că $A = (3^{2016} - 1) : 2$ și că $A > 5^{1209}$.
c) Aflați resul împărțirii numărului A la 121.

Barem:

a) Având în vedere că $2016 = \mathcal{M}_2$ putem grupa termenii sumei câte 2 și obținem:

$A = (1 + 3^1) + 3^2(1 + 3^1) + \cdots + 3^{2014}(1 + 3^1)$

$A = 4 + 3^2 \cdot 4 + \cdots + 3^{2014} \cdot 4 = 4 \cdot (1 + 3^2 + \cdots + 3^{2014}) \vdots 4$ 1p

Având în vedere că $2016 = \mathcal{M}_3$ putem grupa termenii sumei câte 3 și obținem:

$A = (1 + 3^1 + 3^2) + 3^3(1 + 3^1 + 3^2) + \cdots + 3^{2013}(1 + 3^1 + 3^2)$

$A = 13 + 3^3 \cdot 13 + \cdots + 3^{2013} \cdot 13 = 13 \cdot (1 + 2^4 + \cdots + 2^{2012}) \vdots 13$ 1p

$A \vdots 4, A \vdots 13 \; și \; (4,13) = 1 \Rightarrow$

$A \vdots 4 \cdot 13 \Rightarrow A \vdots 52$ 1p

b) Arată printr-una din metodele cunoscute că $A = (3^{2016} - 1) : 2$ 1p

$A = (3^{2016} - 1) : 2 = (2 \cdot 3^{2015} + 3^{2015} - 1) : 2 > 2 \cdot 3^{2015} : 2 > 3^{2015}$ (1)

$3^{2015} = 3^{5 \cdot 13 \cdot 31} = (3^5)^{403} = 243^{403}$ (2)

$5^{1209} = 5^{3 \cdot 403} = (5^3)^{403} = 125^{403}$ (3)

Din (1)+(2)+(3) și $243 > 125 \Rightarrow A > 5^{1209}$ 1p

c) Ignorând primul termen al lui A și grupând restul de 2015 termeni câte 5 avem:

$A = 1 + 3 \cdot (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^6(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \cdots$

$\ldots + 3^{2011}(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$

$A = 1 + 3 \cdot 121 + 3^6 \cdot 121 + \cdots + 3^{2011} \cdot 121$

$A = 1 + 121 \cdot (3 + 3^6 + \cdots + 3^{2011})$ 1p

Conform teoremei împărțirii cu rest, scrierea:

$A = \mathcal{M}_{121} + 1, \text{cu } 1 < 121$ este unică

Rezultă că restul este 1.....1p.